**Chủ đề**

7

**CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH**

**CỰC TRỊ HÌNH HỌC**

# **F.** **CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH CỰC TRỊ HÌNH HỌC**

MỤC LỤC

[F. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH CỰC TRỊ HÌNH HỌC 1](#_Toc535316096)

[A. Phương pháp giải bài toán cực trị hình học. 2](#_Toc535316097)

[1. Dạng chung của bài toán cực trị hình học: 2](#_Toc535316098)

[2. Hướng giải bài toán cực trị hình học: 2](#_Toc535316099)

[3. Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học . 3](#_Toc535316100)

[B. Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học. 4](#_Toc535316101)

[1. Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu. 4](#_Toc535316102)

[2. Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc. 7](#_Toc535316103)

[3. Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn. 9](#_Toc535316104)

[4. Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai . 10](#_Toc535316105)

[5. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si . 12](#_Toc535316106)

[6. Sử dụng tỉ số lượng giác. 15](#_Toc535316107)

[C. Một số bài toán ôn luyện có hướng dẫn 18](#_Toc535316108)

[D. Bài tập tự luyện 35](#_Toc535316109)

[E. Rèn luyện tổng hợp 40](#_Toc535316110)

# **A. Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.**

## **1. Dạng chung của bài toán cực trị hình học:**

***“Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích …) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.”*** và có thể được cho dưới các dạng :

a) Bài toán về dựng hình.

*Ví dụ: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn, xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.*

b) Bài toán vể chứng minh.

*Ví dụ: Chứng minh rằng trong các dây đi qua điểm P trong một đường tròn (O), dây vuông góc với OP có độ dài nhỏ nhất.*

c) Bài toán về tính toán.

*Ví dụ: Cho đường tròn (O;R) và điểm P nằm trong đường tròn có OP = h , tính độ dài nhỏ nhất của dây đi qua P.*

## **2. Hướng giải bài toán cực trị hình học:**

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức *f* có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì  ( *m* là hằng số )

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho 

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức *f* có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+ Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì  ( m là hằng số )

+ Xác định vị trí của hình H trên miền D để 

## **3. Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .**

+ *Cách 1:* Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (*hoặc lớn hơn*) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ *Cách 2:* Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

*Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn( P không trùng với O). Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.*

**Hướng dẫn giải**

***+Cách 1 :***

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB ( h.1).

H

O

C

D

A

B

P

h .1

Kẻ OH ⊥ CD .

ΔOHP vuông tại H ⇒ OH < OP ⇒ CD > AB

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất .

***+ Cách 2 :***

Xét dây AB bất kỳ đi qua P ( h.2). Kẻ OH ⊥ AB

H

O

A

B

P

h .2

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

AB nhỏ nhất ⇔ OH lớn nhất

Ta lại có OH ≤ OP

OH = OP ⇔ H ≡ P

Do đó maxOH = OP

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.

# **B. Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.**

## **1. Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc, đường xiên, hình chiếu.**

***a-Kiến thức cần nhớ:***

A

B

H

C

*h.4*

a

A

B

C

*h.3*

A

B

H

K

a

b

*h.5*

a1) ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) ⇒ AB ≤ BC .

Dấu “=” xảy ra ⇔ A ≡ C . *( h.3 )*

a2) *( h.4 )*

+ AH ⊥ a ⇒ AH ≤ AB . Dấu “=” xảy ra ⇔ B ≡ H .

+ AB < AC ⇔ HB < HC

a3) *( h.5 )*

A,K ∈a; B, H ∈b; a // b ; HK ⊥ a ⇒ HK ≤ AB

Dấu “=” xảy ra ⇔ A ≡ K và B ≡ H .

***b- Các ví dụ:***

**Ví dụ 1:** *Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.*

**Hướng dẫn giải**

A

C

D

B

O

H

A

B

C

D

O≡H

*h.6*

*h.7*

Xét hình bình hành ABCD có AC = 8 cm; BD = 6 cm *( h.6)*

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Kẻ BH ⊥ AC .

Ta có : SABCD = 2SABC  = AC.BH

Ta có AC = 8cm, BH ≤ BO = 3cm. Do đó :

SABCD ≤ 8.3 = 24 (cm2)

SABCD = 24 cm2 ⇔ BH ≡ BO ⇔ H ≡ O ⇔ BD ⊥AC

Vậy max SABCD = 24 cm2 . Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi *(h.7)* có diện tích 24cm2.

**Ví dụ 2:** *Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho AE = BF = CG = DH . Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .*

A

D

B

C

E

K

F

G

H

H

O

*h.8*

***Giải :***

ΔHAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD

⇒ HE = EF = FG = GH

⇒ EFGH là hình thoi .



⇒ ⇒ 

⇒ 

⇒ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân : HE2 = 2OE2 ⇒ HE = OE

Chu vi EFGH = 4HE = 4OE . Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất

Kẻ OK ⊥AB ⇒ OE ≥OK ( OK không đổi )

OE = OK ⇔ E ≡ K

Do đó min OE = OK

Như vậy, chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E,F,G,H là trung điểm của AB , BC, CD, DA.

**Ví dụ 3:** *Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất . Tính diện tích tam giác đó.*

C

A

B

K

H

D

M

1

2

y

x

*h.9*

**Hướng dẫn giải**

Gọi K là giao điểm của CM và DB

MA = MB ; , 

⇒ ΔMAC = ΔMBK ⇒ MC = MK

Mặt khác DM ⊥CK

⇒ ΔDCK cân ⇒ 

Kẻ MH ⊥ CD .

ΔMHD = ΔMBD ⇒ MH = MB = a

⇒ SMCD =CD.MH ≥ AB.MH =2a.a= a2

SMCD = a2 ⇔ CD ⊥ Ax khi đó  = 450 ;  =450.

Vậy min SMCD = a2 . Các điểm C,D được xác định trên Ax; By sao cho AC = BD =a .

**Ví dụ 4:** *Cho tam giác ABC có  là góc tù , điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất .*

**Hướng dẫn giải**

C

A

B

D

F

E

*h.10*

H

Gọi S là diện tích ΔABC Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có :

SABD + SACD = S

Kẻ BE ⊥AD , CF ⊥ AD

⇒AD.BE +AD.CF = S

⇒ BE +CF =

Do đó BE + CF lớn nhất ⇔ AD nhỏ nhất ⇔hình chiếu HD nhỏ nhất

Do HD ≥ HB ( do  >900 ) và HD = HB ⇔ D ≡ B

Vậy Khi D ≡ B thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

## **2. Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.**

***a. Kiến thức cần nhớ:***

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : 

 ⇔ C thuộc đoạn thẳng AB

***b. Các ví dụ:***

**Ví dụ 5:** *Cho góc và điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho OB = OC và tổng AB +AC là nhỏ nhất .*

**Hướng dẫn giải**

*h.11*

O

x

A

B

C

D

m

y

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho  . Trên tia Om lấy điểm D sao cho OD = OA . Các điểm D và A cố định .

OD =OA, OC = OB ,

⇒ ΔDOC = ΔAOB ⇒ CD = AB

Do đó AC +AB = AC +CD

Mà AC +CD ≥ AD

⇒AC +AB ≥ AD

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi C ∈AD

Vậy min(AC+AB) =AD . Khi đó C là giao điểm của AD và Oy, B thuộc tia Ox sao cho OB = OC.

**Ví dụ 6:** *Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD. Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB, G thuộc cạnh BC, H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.*

**Hướng dẫn giải**

A

E

D

F

B

C

G

H

I

K

M

*h.12*

A

E

D

F

B

C

G

H

I

K

M

*h.12*

A

E

D

F

B

C

G

H

I

K

M

*h.13*

Gọi I ,K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG , EH *(h.12).*

ΔAEF vuông tại A có AI là trung tuyến ⇒ 

ΔCGH vuông tại C có CM là trung tuyến ⇒ 

IK là đường trung bình của ΔEFG ⇒ 

KM là đường trung bình của ΔEGH ⇒ 

Do đó : chu vi EFGH = EF +FG +GH +EH =2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có : AI + IK + KM + MC ≥ AC

Suy ra chu vi EFGH ≥ 2AC ( độ dài AC không đổi )

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC ⇔ A,I,K,M,C thẳng hàng.

Khi đó ta có EH//AC,FG//AC,  nên EF//DB , tương tự GH//DB . Suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD *(h.13).*

## **3. Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.**

***a. Kiến thức cần nhớ:***

C

C

*h.14*

*h.15*

*h.16*

*h.17*

C

D

A

B

O

O

A

O

B

C

D

D

A

B

A

B

C

D

D

H

K

a1) Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

AB là đường kính, CD là dây bất kỳ ⇒ CD ≤ AB *(h.14)*

a2) Trong hai dây của đường tròn.

Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn

Dây nào gần tâm hơn thì dâu đó lớn hơn

OH, OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

AB ≥ CD ⇔ OH ≤ OK *(h.15)*

a3) AB,CD là các cung nhỏ của (O) : AB ≥ CD ⇔  *(h.16)*

a4) AB,CD là các cung nhỏ của (O) : AB ≥ CD ⇔  *(h.17)*

***b. Các ví dụ:***

**Ví dụ 7:** *Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau ở A và B, một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O’) tại C và D. Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.*

*h.18*

A

B

C

D

D’

C’

O

O’

n

m

**Hướng dẫn giải**

sđ =sđ ; sđ  =sđ

⇒ số đo các góc ΔACD không đổi (do A, B cố định)

⇒ ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất , chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O), do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O’). Cát tuyến CBD ở vị trí C’BD’ vuông góc với dây chung AB.

**Ví dụ 8:** *Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho  có giá trị lớn nhất .*

O

A

B

P

P

H

A’

B’

A’

*h.19*

)

**Hướng dẫn giải**

Xét tam giác cân OAB , góc ở đáy  lớn nhất nếu góc ở đỉnh  nhỏ nhất .

sđ

Góc  nhỏ nhất ⇔ Cung nhỏ nhất ⇔ dây AB nhỏ nhất ⇔ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có OH ≤ OP

OH =OP ⇔ H ≡ P nên max OH = OP ⇔ AB ⊥ OP

Suy ra dây AB phải xác định là dây A’B’ vuông góc với OP tại P .

## **4. Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai .**

***a. Kiến thức cần nhớ:***

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng :

*A2 ≥ 0 ; −A2 ≤ 0*

Do đó với m là hằng số , ta có :

*f =A2 + m ≥ m* ; min *f = m* với A = 0

*f = − A2 + m ≤ m* ; max *f = m* với A = 0

***b. Các ví dụ:***

H

A

B

C

D

E

F

G

x

4-x

4-x

*h.20*

**Ví dụ 9:** *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm . Trên các cạnh AB, BC,CD,DA, lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho AE = BF = CG = DH . Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.*

**Hướng dẫn giải**

ΔAHE = ΔBEF = ΔCFG = ΔDGH

⇒ HE = EF = FG = GH , HEF = 900

⇒ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất .

Đặt AE = x thì HA = EB = 4-x

ΔHAE vuông tại A nên :

HE 2 = AE2 +AE2 = x2 + (4 − x)2 = 2x2 − 8x +16 = 2(x − 2)2 +8 ≥ 8

HE =  =2 ⇔ x = 2

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng 8cm , khi đó AE = 2 cm .

**Ví dụ 10:** *Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông AB = 6 cm, AC = 8cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.*

**Hướng dẫn giải**

ADME là hình chữ nhật .

*h.21*

A

B

D

x

8-x

E

M

Đặt AD = x thì ME = x

ME //AB ⇒ 

C

⇒ AE = 8 −x

Ta có : SADME  = AD .AE = x ( 8 −x ) = 8x − x2 = −(x − 3)2 +12 ≤ 12

SADME  = 12 cm2 ⇔ x =3

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm2 ,khi đó D là trung điểm của AB , M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

## **5. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si .**

***a-Kiến thức cần nhớ:***

Bất đẳng thức Cô-si : Với x ≥ 0 ; y ≥ 0 ta có : 

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau :

+ *Dạng 1:  hay *

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng 2:  ;*

* ;*

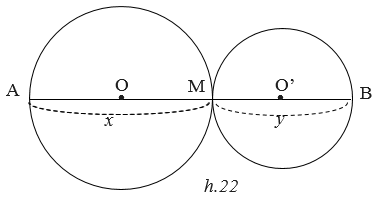
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng 3:* Với x ≥ 0 ; y ≥ 0 ; x + y không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng 4:* Với x ≥ 0 ; y ≥ 0 ; xy không đổi thì x+y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y

***b. Các ví dụ:***

**Ví dụ 11:** *Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy . Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .*

***Giải :***

Đặt MA =x , MB = y

Ta có : x + y =AB (0 < x,y < AB)

Gọi S và S’ theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB .

Ta có: S +S’ = = π.

Ta có bất đẳng thức : nên :

S +S’=

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y

Do đó min (S+S’) = . Khi đó M là trung điểm của AB.

**Ví dụ 12:** *Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất .*

A

B

M

a

b

C

x

y

D

α(

α

*h.23*

**Hướng dẫn giải**

Ta có : SMCD = MC.MD

Đặt MA = a , MB = b



MC = , MD = 

SMCD = 

Do a,b là hằng số nên SMCD nhỏ nhất ⇔ 2sinα.cosα lớn nhất .

Theo bất đẳng thức 2xy ≤ x2 +y2 ta có :

2sinα.cosα ≤ sin2α +cos2α = 1 nên SMCD ≥ ab

SMCD = ab ⇔ sinα = cosα ⇔ sinα = sin(900−α) ⇔ α = 900−α ⇔ α = 450

⇔ ΔAMC và ΔBMD vuông cân.

Vậy min SMCD = ab. Khi đó các điểm C,D được xác định trên tia Ax ; By sao cho AC = AM , BD = BM .

**Ví dụ 13:** *Cho ΔABC , điểm M di động trên cạnh BC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB , chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E.Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.*

A

B

C

M

*x*

*y*

D

K

H

E

1

2

*h.24*

**Hướng dẫn giải**

SADME lớn nhất ⇔  lớn nhất

Kẻ BK ⊥ AC cắt MD ở H.

SADME = MD . HK

SABC = AC . BK



Đặt MB = x , MC = y ,

MD//AC ta có :  ; 

Theo bất đẳng thức ** ⇒ .

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = y

Vậy max SADME =SABC khi đó M là trung điểm của BC.

**Ví dụ 14:** *Cho Δ ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a . Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC . Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH . Khi đó hình thang trở thành hình gì ?*

**Hướng dẫn giải**

Ta có :

2SDEKH = (DH +EK).HK = ( BH +KC ) .HK

Mà (BH + KC) +HK =BC = a không đổi

Nên (BH + KC) .HK lớn nhất ⇔BH + KC) = HK = 

Do đó :

A

D

D

B

H

K

C

E

*h.25*

max SDEKH =

Khi đó đường cao HK =  suy ra :

KC = BC −BH –HK = a −  −  = 

Do đó DH = HB =  , EK = KC =  .

Hình thang DEKH là hình chữ nhật , E là trung điểm của AC.

## **6. Sử dụng tỉ số lượng giác.**

***a-Kiến thức cần nhớ:***

A

B

C

a

c

b

*h.26*

Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

+ b = a.sinB = a.cosC

+ b = c.tgB = c.cotgC

***b-Các ví dụ:***

**Ví dụ 15:** *Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơnlà tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.*

**Hướng dẫn giải**

*h.27*

A

B

C

H

Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH . Đặt  = α

ΔAHC vuông tại H, ta có :

 ,

AH = HC .cotg =BC.cotg

Do đó : S = BC.AH = BC.BC.cotg =BC2cotg

⇒ BC = 

Do S không đổi nên :

BC nhỏ nhất ⇔ tg nhỏ nhất ⇔  nhỏ nhất ⇔ α nhỏ nhất ⇔  nhỏ nhất

**Ví dụ 16:** *Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh BC,CD lần lượt lấy các điểm K,M sao cho BK : KC = 4 : 1, CM : MD = 4 : 1.Tìm tỉ số AB : BC để số đo góc* *lớn nhất .*

*( Cho công thức biến đổi tan( x +y )= )*

**Hướng dẫn giải**

Đặt  , ( x + y < 900 )

A

B

C

D

M

M

K

x

y

*h.28*

lớn nhất ⇔  +  nhỏ nhất

⇔ x + y nhỏ nhất ⇔ tan (x + y) nhỏ nhất

Giả sử AB : BC = 1 : m ( m> 0)

tan x = 

tan y = 

tan( x +y )= **= =

tan (x + y) nhỏ nhất ⇔  nhỏ nhất

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

 ≥ 

Dấu đẳng thức xảy ra ⇔  ⇔ m = 

Vậy x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi m =

Do đó  lớn nhất khi và chỉ khi AB : BC = 2 : 1

# **C. Một số bài toán ôn luyện có hướng dẫn**

**Bài 1**. Cho nửa đường tròn đường kính BC = 2R. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ AH BC Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm O1; O2 cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết R = 25 và BH = 10

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác  đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có  = 900 (vì góc nội tiếpchắn nửa đường tròn)

Tương tự có 

Xét tứ giác ADHE có  => ADHE là hình chữ nhật.

Từ đó DE = AH mà  (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay  (BH = 10; CH = 2.25 - 10 = 40) => DE = 20 (đơn vị độ dài)

b) Ta có: =  (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà  (1)

(Vì ADHE là hình chữ nhật) =>  do  nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Vì  => cân tại  =>  (2)

Từ (1), (2) =>= 900 => 

Vậy  là hình thang vuông tại D và E.

Ta có S = 

(Vì  và  )

.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi 

⇔  là hình chữ nhật

⇔ A là điểm chính giữa cung BC Khi đó max = .

**Bài tập 2.** Cho đường tròn (O), đường kính AB, d1, d2 là các các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. Lấy M, N là các điểm lần lượt thuộc d1, d2 sao cho  = 900.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh AM. BN = .

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**



1) Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng MN. Xét tứ giác OAMH



=> OAMH là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tương tự tứ giác OBNH nội tiếp được

=> (2 góc nội tiếp chắn 1 cung)

 =>  = 900. Hay H thuộc (O) lại có 

=> MN là tiếp tuyến của (O)

2) Ta có AM = MH, BN = NH, theo hệ thức lượng trong tam vuông, ta có:

 (đpcm)

3. OH. MN >  OH. AB (Vì AMNB là hình thang vuông)

Dấu “=” khi và chỉ khi MN = AB hay H là điểm chính giữa của cung AB

M, N song song với AB AM = BN = 

Vậy  nhỏ nhất khi và chỉ khi AM = BN = 

**Bài tập 3.** ChoABC có 3 góc nhọn, trực tâm là H và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AK.

a) Chứng minh tứ giác BHCK là hình hình hành.

b) Vẽ OM BC (M  BC). Chứng minh H, M, K thẳng hàng và AH = 2.OM.

c) Gọi A’, B’, C’ là chân các đường cao thuộc các cạnh BC, CA, AB củaABC Khi BC cố định hãy xác định vị trí điểm A để tổng S = A’B’ + B’C’ + C’A’ đạt giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có  (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên CK AC mà BH AC (vì H trực tâm)

=> CK // BH tương tự có CH // BK

=> Tứ giác BHCK là hbh (đpcm)

b) OM BC => M trung điểm của BC

(định lý đường kính và dây cung) => M là trung điểm của HK (vì BHCK là hình bình hành) => đpcm AHK có OM là đường trung bình => AH = 2.OM

c) Ta có  = 900=> tứ giác BC’B’C nội tiếp đường tròn =>  = mà  (Ax là tiếp tuyến tại A) => Ax // B’C’

OA Ax => OA  B’C’. Do đó SAB’OC’ = R.B’C’

Tương tự: SBA’OC’ = R.A’C’; SCB’OA’ = R.A’B’

 = R(A’B’ + B’C’ + C’A’)= AA’.BC < (AO + OM).BC

 A’B’ + B’C’ + C’A’, lớn nhất khi A, O, M thẳng hàng

 A là điểm chính giữa cung lớn BC

**Bài tập 4.** Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.

2) Chứng minh hệ thức: 

3) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**



1. Theo giả thiết MN ⊥AB tại I





mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiêt MN ⊥AB, suy ra A là điểm chính giữa của  nên (hai

góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay, lại có  là góc chung do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM   

C2: 

3. Theo trên AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECM. Nối MB ta có , do đó tâm O1 của đường tròn ngoại tiếp ΔECM phải nằm trên BM.

Ta thấy  nhỏ nhất khi  là khoảng cách từ N đến BM ⊥BM. Gọi O1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O1M.

Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn (O1), bán kính O1M với đường tròn (O) trong đó O1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

**Bài tập 5.** Cho đường tròn ( O; R ) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho . Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng 2R.

a) Chứng minh tứ giác ABOC là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ∆ADE.

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có: (tính chất tiếp tuyến) (1)

AB = AC = R = OB = OC (2).

Từ (1) và (2) suy ra ABOC là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: AD + DE + AE = 2R (3).

Suy ra: DE = BD + CE (4).

Vẽ OM ⊥ DE (MDE) (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = BD; suy ra ∆BDO = ∆COF (c-g-c)

OD = OF; lại có DE = FE nên ∆ODE = ∆OFE (c-c-c)

OM = OC = R (hai đường cao tương ứng) (6).

Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn (O;R).

c) Đặt: AD = x; AE = y  (x, y > 0)

Ta có: DE (định lí Pitago).

Vì AD + DE + AE = 2R = 2R (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có:  (7).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Từ (6) và (7) suy ra: 

xy  SADE .

Vậy max SADE =  x = y∆ADE cân tại A

**Bài tập 6.** Cho đường trong (O, R) và đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB

1) Chứng minh rằng các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Đoạn OM cắt đường tròn tại I. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

3) Đường thẳng qua O, vuông góc với OM cắt các tia MC, MD thứ tự tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác MPQ bé nhất.

**Hướng dẫn giải**



1) Vì H là trung điểm của AB nên  hay . Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có  hay . Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có MC = MD ⇒ ΔMCD cân tại M ⇒ MI là một đường phân giác của .

Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ  nên sđ = sđ = 

⇒ CI là phân giác của . Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD

3) Ta có tam giác MPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính: . Từ đó S nhỏ nhất ⇔ MD + DQ nhỏ nhất. Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có  không đổi nên MD + DQ nhỏ nhất ⇔ DM = DQ = R. Khi đó OM =  hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính .

**Bài tập 7**. Cho hai đường tròn (O) vàcắt nhau tại A và B Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và .

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Đường thẳng AC cắt đường tròntại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt (O) vàthứ tự tại M và N. Xác định vị trí của d để CM + DN đạt giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có  và  lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O’) 

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác CDEF có:

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O’)

 suy ra CDEF là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); suy ra CM // DN hay CMND là hình thang.

Gọi I, K thứ tự là trung điểm của MN và CD Khi đó IK là đường trung bình của hình thang CMND Suy ra IK // CM // DN (1) và CM + DN = 2.IK (2)

Từ (1) suy ra IK ⊥ MN  IK  KA (3) (KA là hằng số do A và K cố định).

Từ (2) và (3) suy ra: CM + DN 2KA

Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi IK = AKd ⊥ AK tại A

Vậy khi đường thẳng d vuông góc AK tại A thì (CM + DN) đạt giá trị lớn nhất bằng 2KA

**Bài tập 8.** Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R) ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ MIAB, MKAC (IAB,KAC)

a) Chứng minh: AIMK là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ MPBC (PBC). Chứng minh: .

c) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MI.MK.MP đạt giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



a) Ta có:(gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp(1). Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có:  (cùng chắn ) (2). Từ (1) và (2) suy ra (3)

c) Chứng minh tương tự câu b ta có BPMI là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: (4). Từ (3) và (4) suy ra .

Tương tự ta chứng minh được .

Suy ra: MPK∆MIP

MI.MK = MP2  MI.MK.MP = MP3.

Do đó MI.MK.MP lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất (4)

- Gọi H là hình chiếu của O trên BC, suy ra OH là hằng số (do BC cố định).

Lại có: MP + OH  OM = R MP  R – OH. Do đó MP lớn nhất bằng R – OH khi và chỉ khi O, H, M thẳng hàng hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC (5).

Từ (4) và (5) suy ra max (MI.MK.MP) = ( R – OH )3 M nằm chính giữa cung nhỏ BC

**Bài tập 9.** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh AC + BD = CD

2) Chứng minh  .

3) Chứng minh  .

4) Chứng minh OC // BM

5) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

6) Chứng minh MN ⊥ AB

7) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**



1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM

=> AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà ∠AOM và ∠BOM là hai góc kề bù => ∠COD = 900.

3. Theo trên nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD ( OM là tiếp tuyến ).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có  ,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM =>  => 

4. Theo trên nên OC ⊥ OD(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM ( Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

IO // AC, mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => , mà CA = CM; DB = DM nên suy ra 

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB

7. Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

**Bài tập 10.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính . Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn (M khác A và B). C là trung điểm của dây cung AM. Đường thẳng d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại B Tia AM cắt d tại điểm N. Đường thẳng OC cắt d tại E.

a) Chứng minh: tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Chứng minh: AC.AN = AO.AB

c) Chứng minh: NO vuông góc với AE.

d) Tìm vị trí điểm M sao cho (2.AM + AN) nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**

6. 

a) Phần đường kính OC đi qua trung điểm C của AM ⇒ OC ⊥ AM ⇒ .

BN là tiếp tuyến của (O) tại B ⇒ OB ⊥ BN ⇒ 

Xét tứ giác OCNB có tổng hai góc đối: 

Do đó tứ giác OCNB nội tiếp.

b) Xét ΔACO và ΔABN có:  chung; 

⇒ ΔACO ~ ΔABN (g.g)

⇒ 

Do đó ACAN = AO.AB (đpcm).

c) Theo chứng minh trên, ta có:

OC ⊥ AM ⇒ EC ⊥ AN ⇒ EC là đường cao của ΔANE (1)

OB ⊥ BN ⇒ AB ⊥ NE ⇒ AB là đường cao của ΔAME (2)

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của ΔANE (vì O là giao điểm của AB và EC).

⇒ NO là đường cao thứ ba của ΔANE.

Do đó; NO ⊥ AE (đpcm).

d) Ta có: 2.AM + AN = 4AC + AN (vì C là trung điểm của AM).

4AC.AN = 4AO.AB = 4R.2R = 8R2

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

4AC + AN ≥ 

⇒ Tổng 2.AM + AN nhỏ nhất = ⇔ 4AC = AN

⇔ AN = 2AM ⇔ M là trung điểm của AN.

ΔABN vuông tại B có BM là đường trung tuyến nên AM = MB

⇒  ⇒ M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB

Vậy với M là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB thì (2.AM + AN) nhỏ nhất = .

**Bài tập 11.** Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và đường kính CD thay đổi không trùng với AB Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE và AF.

1) Chứng minh ACBD là hình chữ nhật;

2) Gọi H là trực tâm của tam giác BPQ. Chứng minh H là trung điểm của OA;

3) Xác định vị trí của đường kính CD để tam giác BPQ có diện tích nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**

a) Có ( Các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tứ giác ACBD là hình chữ nhật ( Tứ giác có ba góc vuông)

b) Có PO là đường trung bình của tam giác AEB PO // EB mà EB  BF POBF

Xét tam giác PBF có BA PF; POBF nên BA và PO là các đường cao của tam giác PBF mà BA và PO căt nhau tại O nên O là trực tâm của tam giác PBFFO là đường cao thứ ba của tam giác PBF hay FOPB (1).

Lại có H là trực tâm của tam giác PBQ nên QH  PB (2)Từ (1) và (2)  QH // FO. Xét tam giác AOF có Q là trung điểm của AF; QH // FO nên H là trung điểm của AO

c)  (3)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với hai số không âm AE và AF ta có: AE + AF  (4)

( Dấu “=” xảy ra AE =AF)

Từ (3) và (4)  (5)

Lại có: Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông EBF ta có:

AE.AF = AB2 (6) Từ (5) và (6) ta có SBPQ

Xảy ra dấu bằng khi AE = AF

 Tam giác EBF vuông cân tại B

ACBD là hình vuông nên CD vuông góc AB

Vậy: Khi đường kính CD vuông góc với đường kính AB thì tam giác PBQ có diện tích nhỏ nhất

**Bài tập 12.** Trên đoạn thẳng AB cho điểm C nằm giữa A và B Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AB kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB Trên tia Ax lấy điểm I, tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P ( P khác I)

a) Chứng minh tứ giác CPKB nội tiếp một đường tròn, chỉ rõ đường tròn này.

b) Chứng minh .

c) Giả sử A, B, I cố định. Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho diện tích tứ giác ABKI lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

A

C

B

K

y

I

x

P

*a)* Có:  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

Do  nên .

Suy ra: hay tứ giác CPKB nội tiếp đường tròn đường kính CK.

*b)* Ta có:  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung); (1)

Mặt khác tứ giác PCBK nội tiếp nên:  (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

*c)* Từ giả thiết suy ra tứ giác *AIKB* là hình thang vuông, gọi *s* là diện tích của *AIKB*, khi đó ta có: . Dễ thấy *s* lớn nhất khi và chỉ khi *KB* lớn nhất (do A, B, I cố định).

Xét các tam giác vuông *AIC* và *BKC* có:  và  suy ra:  (góc có cạnh tương ứng vuông góc) hay  đồng dạng với (g-g).

Suy ra: , khi đó: *BK* lớn nhất *ACBC* lớn nhất

Theo BĐT Côsi có: , dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi *C* là trung điểm của *AB* Vậy diện tích tứ giác *AIBK* lớn nhất khi và chỉ khi *C* là trung điểm của *AB*

**Bài tập 13.** Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và. B Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh ∆AME ∆ACM và AM2 = AE.AC

c) Chứng minh AE.AC - AI.IB = AI2.

d) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

**Hướng dẫn giải**

A

B

M

E

C

I

O1

N

a) \*  (giả thiết)

\*  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

\* Kết luận: Tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp

b) Ta có:

\* sđ = sđ

\*

\*Góc A chung, suyra ∆AME  ∆ACM.

\* Do đó: 

c) \* MI là đường cao của tam giác vuông MAB nên MI2 = AI.IB

\* Trừ từng vế của hệ thức ở câu b) với hệ thức trên

\* Ta có: 

d) \* Từ câu b) suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME. Do đó tâm O1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME nằm trên BM. Ta thấy khoảng cách NO1 nhỏ nhất khi và chỉ khi NO1BM.)

\* Dựng hình chiếu vuông góc của N trên BM ta được O1. Điểm C là giao của đường tròn đã cho với đường tròn tâm O1, bán kính O1M.

**Bài tập 14.** Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC

a) Chứng minh tứ giác: CBMD nội tiếp được

b) Chứng minh rằng: DBDC = DN.AC

c) Xác định vị trí của điểm D để diện tích hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất và tính diện tích trong trường hợp này

**Hướng dẫn giải**



a.  (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

mà AD//BC (gt) => DB⊥BC

Xét tứ giác DMBC có  => Tứ giác nội tiếp.

b. Ta có ΔDBN đồng dạng với ΔCAD

( , )

=>  => 

c. 

Do AB không đổi = 2R

=>  max ⇔DH max ⇔ D nằm chính giữa cung AB

**Bài tập 15.** Cho đường tròn (O), dây AB không đi qua tâm. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M (M không trùng với A, B). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. Kẻ MK vuông góc với AN .

1) Chứng minh: Bốn điểm A, M, H, K thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh: MN là phân giác của góc BMK.

3) Khi M di chuyển trên cung nhỏ AB Gọi E là giao điểm của HK và BN.

Xác định vị trí của điểm M để (MK.AN + ME.NB) có giá trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



*Chú ý:* Kể cả trường hợp đặc biệt khi MN đi qua O

1) Từ giả thiết: , 

Bốn điểm A, K, H, M cùng thuộc một đường tròn

2)  = sđ (1)

 = sđ (2)

Từ (1) và (2) 

 MN là phân giác của góc KMB

3) sđ; sđ

 cùng thuộc một đường tròn





 lớn nhất  MN.AB lớn nhất

MN lớn nhất (Vì AB= const )  M là chính giữa 

**Bài tập 16.** Cho (O),dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung AB sao cho MA> MB (M≠A và M≠B), kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại H. Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

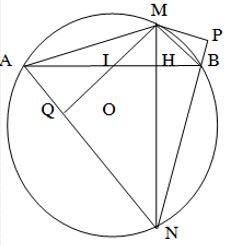
1. C/m 4 điểm A;M;H;Q cùng nằm trên một đường tròn.

2. C/m:NQ.NA=NH.NM

3. C/m MN là phân giác của góc  .

4. Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN;xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



1/ C/m:A,Q,H,M cùng nằm trên một đường tròn.



2/C/m: NQ.NA=NH.NM.

Xét hai Δvuông NQM và ΔNAH đồng dạng. (g-g)

3/C/m MN là phân giác của góc BMQ. Có hai cách:

 (Cùng phụ với góc ANH)

 (Cùng chắn cung NB) ⇒ đpcm

4/ Xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giác trị lớn nhất.

Ta có 



2SΔMAN + 2SΔMBN = MQ.AN+MP.BN

Ta lại có: 2SΔMAN + 2SΔMBN =2(SΔMAN + SΔMBN)=2SAMBN=2.=AB.MN

Vậy: MQ.AN+MP.BN=AB.MN

Mà AB không đổi nên tích ABMN lớn nhất ⇔ MN lớn nhất⇔MN là đường kính

⇔M là điểm chính giữa cung AB

**Bài tập 17.** Cho đường tròn (O) đường kính AB Gọi I là trung điểm của OA Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A

2. Chứng minh IP // OQ.

3. Chứng minh rằng AP = PQ.

4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**

1. Ta có OI = OA – IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đường tròn (O) và đường tròn (I). Vậy đường tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A

2. ΔOAQ cân tại O ( vì OA và OQ cùng là bán kính ) => ∠A1 = ∠Q1

ΔIAP cân tại I ( vì IA và IP cùng là bán kính ) => ∠A1 = ∠P1

=> ∠P1 = ∠Q1 mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.



3. ∠APO = 900 (nội tiếp chắn nửa đường tròn ) => OP ⊥ AQ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (*HD*) Kẻ QH ⊥ AB ta có SAQB = ABQH. mà AB là đường kính không đổi nên SAQB lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO => PI ⊥ AO mà theo trên PI // QO => QO ⊥ AB tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

# **D. Bài tập tự luyện**

**Bài tập 1.** Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là một điểm nằm giữa hai điểm A và B Trên nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tia A*x* và B*y* tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho. Trên tia Ax lấy điểm I (với I khác A); đường thẳng vuông góc với CI tại C cắt tia B*y* tại K. Đường tròn đường kính IC cắt tia IK tại E.

1. Chứng minh tứ giác CEKB nội tiếp được đường tròn.

2. Chứng minh 

3. Chứng minh điểm E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB

4. Cho các điểm A; B; I cố định. Hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang ABKI lớn nhất.

**Bài tập 2.** Cho tam giác ABC vuông cân ở A, trên cạnh BC lấy điểm M. Gọi (O1) là đường tròn tâm O1 qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi (O2) là đường tròn tâm O2 qua M và tiếp xúc với AC tại C Đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại D (D không trùng với A).

1) Chứng minh rằng tam giác BCD là tam giác vuông.

2) Chứng minh O1D là tiếp tuyến của (O2).

3) BO1 cắt CO2 tại E. Chứng minh 5 điểm A, B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

4) Xác định vị trí của M để O1O2 ngắn nhất.

**Bài tập 3.** Cho tam giác đều ABC, trên cạnh BC lấy điểm E, qua E kẻ các đường thẳng song song với AB và AC chúng cắt AC tại P và cắt AB tại Q.

1) Chứng minh BP = CQ.

2) Chứng minh tứ giác ACEQ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí của E trên cạnh BC để đoạn PQ ngắn nhất.

3) Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho  . Tính góc AHC

**Bài tập 4.** Cho hình vuông ABCD, M là một điểm trên đường chéo BD, gọi H, I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC và AD

1) Chứng minh:MIC = HMK.

2) Chứng minh CM vuông góc với HK.

3) Xác định vị trí của M để diện tích của tam giác CHK đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài tập 5.** Cho nửa đường tròn đường kính MN. Lấy điểm P tuỳ ý trên nửa đường tròn (P  M, P  N). Dựng hình bình hành MNQP. Từ P kẻ PI vuông góc với đường thẳng MQ tại I và từ N kẻ NK vuông góc với đường thẳng MQ tại K.

1) Chứng minh 4 điểm P, Q, N, I nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh: MP. PK = NK. PQ.

3) Tìm vị trí của P trên nửa đường tròn sao cho NK.MQ lớn nhất.

**Bài tập 6.** Cho điểm A ở ngoài đường tròn tâm O. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (MB, MC). Gọi D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC, BC; H là giao điểm của MB và DF; K là giao điểm của MC và EF.

1) Chứng minh:

a) MECF là tứ giác nội tiếp.

b) MF vuông góc với HK.

2) Tìm vị trí của điểm M trên cung nhỏ BC để tích MDME lớn nhất.

**Bài tập 7.** Cho đường tròn tâm 0, đường kính AB = 2R, C là trung điểm của OA, kẻ dây cung MN vuông góc với OA tại C Lấy điểm K tuỳ ý thuộc cung BM nhỏ. Gọi H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh tứ giác BCHK nội tiếp

b) Tính AH. AK theo R

c) Xác định vị trí của điểm K để tổng KM + KN + KB đạt giá trị lớn nhất, tính giá trị lớn nhất đó.

**Bài tập 8.** Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O; R). M di động trên AB N di động trên tia đối của tia CA sao cho BM = CN.

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D Chứng minh rằng D cố định.

b) Tính góc MDN.

c) MN cắt BC tại K. Chứng minh DK vuông góc với MN.

d) Đặt AM = x. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

**Bài tập 9.** Hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?

c) Tìm vị trí của d để tam giác PQB có chu vi lớn nhất.

**Bài tập 10.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), H là trực tâm của tam giác ABC, M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A

a. Xác định vị trí của M để tứ giác BHCM là hình bình hành.

b. Gọi N và E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC Chứng minh ba điểm N. H, E thẳng hàng.

c. Xác định vị trí của M để NE có độ dài lớn nhất.

**Bài tập 11.** Cho (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với (O). (B, C, M, N cùng thuộc (O); AM<AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với (O).

a. Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh góc AOC=góc BIC

c. Chứng minh BI//MN.

d. Xác định ví trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

**Bài tập 12.** Cho đường tròn (O) đường kính AB=2R và một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Người ta vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N. Đường tròn này cắt MA, MB lần lượt tại các điểm thứ hai C, D

a. Chứng minh CD//AB

b. Chứng minh MN là tia phân giác của góc AMB và đường thẳng MN đi qua một điểm K cố định.

c. Chứng minh tích KM.KN cố định.

d. Gọi giao điểm của các tia CN, DN với KB, KA lần lượt là C', D'. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác NC'D' đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

**Bài tập 13.** Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn.Từ A vẽ 2 tiếp tuyến AB,AC với đường tròn (O).

1. C/m OA vuông góc BC

2. Vẽ cát tuyến AMN của (O).Gọi E là trung điểm MN.C/m A,O,E,C cùng thuộc 1 đương tròn và xác định tâm K.

3. Tia CE cắt (O) tại I.C/m BI//MN

4. Tìm vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

**Bài tập 14.** Cho đường tròn (O; R), Với các kí hiệu có trên hình hãy chứng minh:

a)Tứ giác CAIM, BDMI nội tiếp.

b)Tam giác CID vuông.

c)EF // AB

d)Khi M cố đinh I thay đổi trên AO, tìm vị trí của I để ACBD lớn nhất.

e) Cho biết khi OI =  và AM = R. Hãy tính độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác CID theo R.

**Bài tập 15.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn.Từ A vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD (nằm giũa A và D )

1) Chứng minh AB2 = ACAD

2) Gọi H là trung điểm CD Chứng minh tứ giác ABOE có bốn điểm cùng thuộc một đường tròn.

3) Vẽ tia Bx // CD cắt (O) tại I, IE cắt (O) tại K.Chứng minh AK là tiếp tuyến của (O).

4) Đường thẳng BH cắt (O) tại F.Chứng minh KF // CD

5) Tím vị trí của cát tuyến ACD đề diện tích tam giác AID lớn nhất.

**Bài tập 16.** Cho đường tròn ( O,R ), đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM và CN ( M và N thuộc (O) ). Goi H là trung điểm AB,đường thẳng OH cắt tia CN tại K. Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I. Chứng minh:

1) C,O,H,N cùng thuộc một đường tròn.

2) KN.KC= KH.KO

3) I cách đều CM, CN, MN

4) Một đường thẳng qua O song song MN cắt tia CM và CN tại E và F.Xác định vị trí C trên d để diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

**Bài tập 17.** Cho tam giác ABC vuông tại A có M là trung điểm của BC Có hai đường thẳng lưu động và vuông góc với nhau tại M cắt các đoạn AB và AC lần lượt tại D và E. Xác định các vị trí của D và E để diện tích tam giác DME đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài tập 18.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C thuộc đoạn AB, M là một điểm trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt các tiếp tuyến qua A và B của nửa đường tròn tại E và F.

1) Khi M cố định,C di động.Tìm vị trí của C để AE.BF lớn nhất.

2) Khi C cố định,M di động. Tìm vị trí của M để  lớn nhất.

**Bài tập 19.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB=2R,M là một điểm trên nửa đường tròn(khác A và B).Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn (O) tại C và D

1)Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a)Độ dài đoạn thẳng CD và diện tích tam giác COD

b) Diện tích và chu vi tứ giác ACDB

c)Tổng diện tích của tam giác ACM và BDM

2) Tìm giá trị lớn nhất của:

a) Diện tích và chu vi tam giác MAB

b) Tích MAMB

**Bài tập 20.** (Đề thi tuyển vào lớp 10, 95 - 96 Thành phố Hồ Chí Minh) Cho hình vuông ABCD cố định cạnh a. Điểm E di chuyển trên cạnh CD ( E D ) Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

1) Chứng minh ABF = ADK,suy ra AKF vuông cân

2) Gọi I là trung điểm của FK.Chứng minh làtâm đường tròn qua A,C, F,K và I di chuyển trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD

3) Chứng minh tứ giác ABFI nội tiếp được.

4) Cho DE = x (0 < x ).Tính độ dài các cạnh của AEK theo a và x.

5) Hãy chỉ ra vị trí của E để EK ngắn nhất.

**Bài tập 21.** Cho hai đường tròn (O; R ) và (O; R’) cắt nhau tại A và B Một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) và (O’) tại C và D

1) Chứng minh đường trung trực của đoạn thẳng CD luôn đi qua điểm cố định. Xác địmh điểm cố định ấy.

2) Với vị trí nào của đường thẳng (d) thì tam giác BCD có diện tích lớn nhất.

**Bài tập 22.** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC).Lấy điểm D thuộc cạnh AC Vẽ đường tròn đường kính CD cắt BD ở E và cắt AE ở F.

a) Chứng minh A, B, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh BĈA = AĈ F.

c) Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của D qua AB và BC Chứng minh tứ giác BNCM nội tiếp.

d) Xác định vị trí điểm D sao cho bán kính đường tròn (BNCM) đạt giá trị nhỏ nhất.

# **E. Rèn luyện tổng hợp**

**Bài 1 :** Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

1. Lớn nhất
2. Nhỏ nhất

*h.29*

A

B

M

C

D

D’

A’

O

N

H

C’

B’

d

***Hướng dẫn:***

*Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD (h.29)*

*Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến D.*

*m =2(AA’ +BB’)*

*Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A’B’*

*Suy ra : m = 4MN do đó:*

*m lớn nhất ⇔ MN lớn nhất*

*m nhỏ nhất ⇔ MN nhỏ nhất*

*a) MN ≤ MO ⇒ m lớn nhất ⇔ M≡O ⇔ d//AB*

*b)kẻ MH ⊥ OB . Chứng minh MN ≥MH ⇒ MN nhỏ nhất ⇔ N ≡H ⇔ d≡BD hoặc d ≡AC.*

**Bài 2 :** Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB , AC sao cho BD = AE . Xác định vị trí các điểm D,E sao cho :

1. DE có độ dài nhỏ nhất .
2. Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất .

A

B

D

C

E

M

I

*h.30*

***Hướng dẫn:*** *(h.30)*

*a)Gọi M là trung điểm của BC .*

*ΔBDM = ΔAEM ⇒*

*⇒*

*Gọi I là trung điểm của DE .*

*DE = DI+IE =AI + IM ≥ AM*

*Min DE = AM ⇔ I là trung điểm của AM*

*⇔ D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC*

*b)Đặt AE = x, AB =AC =a thì AD = a − x , SADE  = *

*SBDEC nhỏ nhất ⇔ SADE lớn nhất ⇔ x(a − x) lớn nhất*

*Do x +( a− x) = a không đổi nên x( a − x) lớn nhất ⇔ x = a − x ⇔ x = a/2*

*Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC*

**Bài 3 :** Cho Δ ABC vuông tại A có BC = a , diện tích là S . Gọi m là trung điểm của BC . Hai dường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB , AC ở D ,E .Tìm :

1. Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE .
2. Giá trị nhỏ nhất của diện tích Δ MDE

*h.31*

A

B

C

M

D

O

E

***Hướng dẫn:***

*a) (h.31)Gọi O là trung điểm của DE*

*Ta có OA = OD =OE = OM*

*⇒ DE = OA + OM ≥ AM = *

*minDE = a/2 ⇔ O là trung điểm của AM*

*⇔ D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC*

*h.32*

A

B

C

M

D

K

E

H

*b) (h.32)Kẻ MH ⊥ AB , MK ⊥ AC*

*ME ≥ MK , MD ≥ MH .*

*2SMDE = MD.ME ≥ MH.MK =. =*

*minSMDE = ⇔ D ≡ H và E ≡ K*

**Bài 4 :** Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB .Vẽ các tam giác đềuAMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều tren là nhỏ nhất .

***Hướng dẫn:*** *(h.33)*

*h.33*

K

A

B

M

D

C

1

2

x

y

*Gọi K là giao điểm của AC và BD .*

*Các tam giác AMC ,BMD đồng dạng với ΔAKB*

*Đặt AM = x ,BM = y , AB = a ta có :*

*;*

*⇒*

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y*

*Do đó : min (S1 +S2) = ⇔ M là trung điểm của AB.*

**Bài 5 :** Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c tương ứng đường cao AH =H. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất . Biết M ∈AB ; N ∈ AC ; P,Q ∈ BC.

***Hướng dẫn:*** *(h.34)*

*h.34*

A

M

B

Q

H

P

C

N

y

I

h-x

*Gọi I là giao điểm của AH và MN*

*Đặt NP =x ; MN = y ; AI = h − x*

*ΔAMN Δ ABC*

*⇒ *

*⇒ SMNPQ = xy = . x(h − x)*

*⇒ SMNPQ lớn nhất ⇔ x(h − x)lớn nhất*

*x +(h − x) = h không đổi nên*

*x(h − x) lớn nhất ⇔ x = h − x ⇔ x = h/2*

*Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC*

**Bài 6 :** Cho Δ ABC vuông tại A . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC , IK ⊥AB . Tìm vị trí của I sao cho tổng IM2 +IN2 +IK2 nhỏ nhất**.**

***Hướng dẫn:*** *(h.35)*

*Kẻ AH ⊥BC , IE ⊥AH*

*h.35*

A

K

B

H

M

C

N

I

E

*ANIK ,IMHE là các hình chữ nhật.*

*IK2+ IN2 = IK2 +AK2 = AI2 ≥ AE2*

*IM = EH*

*nên IK2+ IN2 + IM2 = AI2 +EH2 ≥ AE2+EH2*

*Đặt AE = x , EH =y ta có :*

*⇒ IK2+ IN2 + IM2 ≥ .*

*Dấu “=” xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.*

**Bài 7 :**  Cho tam giác nhọn ABC .Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC , IK ⊥AB . Đặt AK =x ; BM = y ; CN = z .

A

*h.36*

B

C

M

N

KKK

*x*

*n*

*z*

*m*

*y*

*k*

I

Tìm vị trí của I sao cho tổng x2 +y2 +z2 nhỏ nhất**.**

***Hướng dẫn****: (h.36)*

*Đặt BK = k , CM = m , AN = n ,*

*BC = a , AC = b , AB = c .*

*x2 +y2 +z2 =*

*=(IA2 − IK2 ) + (IB2 − IM2 ) + (IC2 − IN2 )*

*= (IA2 − IN2 ) + (IB2 − IK2 ) + (IC2 − IM2 ) = n2 + k2 + m2*

*⇒ 2(*x2 +y2 +z2 ) = x2 +y2 +z2 + *n2 + k2 + m2*

= ( x2*+ k2* )+( y2*+ m2* )+( z2 + *n2* )

x2*+ k2 ≥ * y2*+ m2 ≥*

z2 + *n2 ≥*

*⇒ x2 +y2 +z2 ≥  .*

*min(x2 +y2 +z2 ) =  ⇔ x = k , y = m , z = n.*

*⇔ I là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC.*

**Bài 8 :** Cho nửa đường tròn có đường kính AB = 10 cm .Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABFE.



*h.37*

***Hướng dẫn:*** *(h.37)*

*Kẻ OH ⊥CD , ta tính được OH = 4cm*

*SABFE = 1/2(AE + BF).EF*

*= OH.EF ≤ OH. AB = 4.10 =40*

*max SABEF =40 cm2*

*⇔ EF // AB , khi đó OH ⊥ AB*

**Bài 9 :** Cho hình vuông ABCD cạnh a .Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông ) .một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.



*h.38*

***Hướng dẫn:****(h.38)*

*Đặt CM = m , CN = n , MN = x*

*m + n + x = 2CD = 2a và m2 +n2 = x2*

*Do đó : x2= m2 +n2 ≥ *

* *2x2 ≥ ( 2a − x)2 ⇒  ≥ 2a − x*
* *x ≥*

*min MN =2a ⇔ m = n . Khi đó tiếp tuyến MN // BD , AM là tia phân giác của  , AN là phân giác của *

**Bài 10 :** Cho hai đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại A .Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau , chúng cắt các đường tròn (O) , (O’) lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để Δ ABC có diện tích lớn nhất .

***Hướng dẫn:****(h.39)*

*h.39*

*α*

*α*



*Kẻ OD ⊥ AB ; O’E ⊥ AC ta có:*

*SABC  = AB.AC =.2AD.2AE= 2.AD.AE*

*Đặt OA =R ; O’A = r ;*

*AD = R sinα ; AE = r cosα*

*⇒ SABC  = Rr. 2sinα .cosα*

*2sinα .cosα ≤ sin2α + cos2α =1*

* *SABC  ≤ Rr*

*Do đó :*

*max SABC  = Rr ⇔ sinα = cosα ⇔ sinα = sin( 900− α ) ⇔ α = 900 − α ⇔ α = 450.*

*Vậy nếu ta vẽ các tia AB,AC lần lượt tạo với các tia AO, AO’ thành các góc thì Δ ABC có diện tích lớn nhất .*

**Bài 11 :** Cho đường tròn (O;R) đường kính BC, A là một điểm di động trên đường tròn . Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB. Gọi D, E , F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác DEFG đạt giá trị lớn nhất.

***Hướng dẫn:*** *(h.40)*

*DEFG là hình bình hành.*

*Kẻ OI ⊥FH , ta có OI là đường trung bình của Δ BHC nên OI = ½ HC = GD*

*MO là đường trung trực của AB nên ⇒ OI = ½ OM ⇒ GD = ½ OM*

*Mà ED = ½ OM ⇒ EG = GD*

*⇒ DEFG là hình thoi*

*⇒⇒ΔEFG đều*

*⇒ SDEFG =2SEFG = 2.* = ≤ =

*max S =  ⇔ H ≡ B ⇔ ⇔ ⇔ AC = R.*

**Bài 12 :** Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B,C. Gọi H,I,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC , AC, AB . Đặt BC = a , AC = b ,AB = c, DH = x , DI = y , DK = z .

1. Chứng minh rằng : 
2. Tìm vị trí của điểm D để tổng  nhỏ nhất .

*h.41*

A

B

K

D

*z*

C

I

H

•O

*x*

*y*

•

M

E

*c*

*b*

***Hướng dẫn:*** *(h.41)*

*a) Lấy E trên BC sao cho *

*ΔCDE đồng dạng với Δ ADB*

*⇒ *

*Tương tự ΔBDE đồng dạng với Δ ADC*

*⇒*

*⇒*

*b) == Do đó S nhỏ nhất ⇔  nhỏ nhất ⇔ x lớn nhất ⇔ D≡M ( M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A)*

**Bài 13 :** Cho ΔABC nhọn , điểm M di chuyển trên cạnh BC .Gọi P ,Q là hình chiếu của M trên AB , AC . Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất .

*h.42*

A

B

P

Q

C

O

H

M

***Hướng dẫn:*** *(h.42)*

*Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.*

*Kẻ OH ⊥ PQ . Đặt  =α thì = α*

*PQ = 2 PH = 2.OP sinα = AM sinα*

*Do α không dổi nên*

*PQ nhỏ nhất ⇔ AM nhỏ nhất ⇔ AM ⊥BC.*

**Bài 14 :** Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB .Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB,AC,BC . Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó dạt giá trị lớn nhất.

***Hướng dẫn:*** *(h.43)*

*Gọi (O1;r1);(O2;r2);(O3;r3) là các đường tròn có đường kính là Ab,AC,BC*

*Đặt AB = 2a , AC =2x thì r1 = a , r2= x Suy ra BC =2a − 2x và r3 = a − x*

*Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn*

*Ta có : =*

*S lớn nhất ⇔ x( a −x) lớn nhất*



*h.43*

*Mặt khác x + (a − x) = a không đổi nên*

*x( a −x) lớn nhất ⇔ x = a − x ⇔ x =  ⇔ C ≡O1*

*Lúc đó ta có S =*

**Bài 15 :** Cho đường tròn (O;R) . Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O1) và (O2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O2) gấp đôi bán kính đường tròn (O1). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O1) và(O2) .

***Hướng dẫn:***

*Gọi x là bán kính đường tròn (O1) Khi đó 2x là bán kính đường tròn (O2 ) (h.44)*

*Xét ΔOO1O2 ta có : O1O2 ≤ O O1 +OO2*

*⇒ 3x ≤ (R − x) +( R − 2x) ⇒ 6x ≤ 2R ⇒ x ≤ *

*Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O1)và (O2 ) , ta có :*

*S = *

*Do x ≤  nên x2 ≤  ⇒ S ≥ ;*

*min S = ⇔ x =*

*Khi đó O1,O,O2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O1) và (O2 ) là  và  (h.45).*